



TITLE:

巡回的標準盤の数え上げに関する 公式について (組合せ論的表現論の 諸相)

AUTHOR(S):

鈴木, 武史; 豊澤, 由貴

CITATION:

鈴木, 武史 ...[et al]. 巡回的標準盤の数え上げに関する公式について (組合せ論的表現論の諸相). 数理解析研究所講究録 2019, 2127: 66-78

ISSUE DATE:

2019-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/252256>

RIGHT:

巡回的標準盤の数え上げに関する公式について

岡山大学・大学院自然科学研究科 鈴木 武史

Takeshi Suzuki

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

岡山大学・大学院自然科学研究科 豊澤 由貴

Yoshitaka Toyosawa

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

概要

skew Young 図を平行移動しながら周期的にはり合わせて得られる図を巡回的 skew Young 図, その上の“標準盤”を巡回的標準盤と呼ぶ. 巡回的標準盤は, 表現論的には(退化)アフィン Hecke 代数の特別なクラスの既約モジュラー表現の基底を記述することが知られており, 特に巡回的標準盤の個数は対応する既約表現の次元を与える. 本稿では, 巡回的標準盤の個数およびその母関数に関するいくつかの公式を紹介し, また, 近年成瀬氏によって得られた skew Young 図上の標準盤の個数に関する hook 公式の拡張を予想として提示する.

1 巡回的 skew Young 図と巡回的標準盤

当面, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する.

定義 1.1. 整数列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ は

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$$

を満たすとき長さ m の **partition** と呼ばれ, さらに

$$\lambda_1 - \lambda_m \leq l$$

を満たすとき **l -restricted partition** と呼ばれる. 長さ m の partition および l -restricted partition 全体を \mathcal{P}_m および $\mathcal{P}_{m,l}$ で表す.

$\lambda, \mu \in \mathcal{P}_m$ であって $\lambda \supset \mu$ とする (すなわち, すべての i に対して $\lambda_i \geq \mu_i$). 対応する

skew Young 図を

$$\lambda/\mu := \left\{ (i, j) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^2 \mid i \in [1, m], j \in [\mu_i + 1, \lambda_i] \right\}$$

で与えられる \mathbb{Z}^2 の部分集合として定める. ここで, $[a, b] := \{a, a+1, a+2, \dots, b\}$.

さらに, $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$ のとき

$$\widehat{\lambda/\mu} = \widehat{\lambda/\mu}_{(m,-l)} := \lambda/\mu + \mathbb{Z}(m, -l)$$

と置く. $\widehat{\lambda/\mu}$ は周期 $(m, -l)$ を持つ \mathbb{Z}^2 の周期的部分集合である. すなわち,

$$\widehat{\lambda/\mu} + (m, -l) = \widehat{\lambda/\mu}$$

命題 1.2. (skew property) $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$ のとき以下が成り立つ:

$$(i, j), (i+1, j+1) \in \widehat{\lambda/\mu} \implies (i, j+1), (i+1, j) \in \widehat{\lambda/\mu}$$

$\widehat{\lambda/\mu}$ を $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$ に付随する周期 $(m, -l)$ の巡回的 skew Young 図 (cylindric skew diagram) または周期的 skew Young 図 (periodic skew diagram) と呼ぶ.

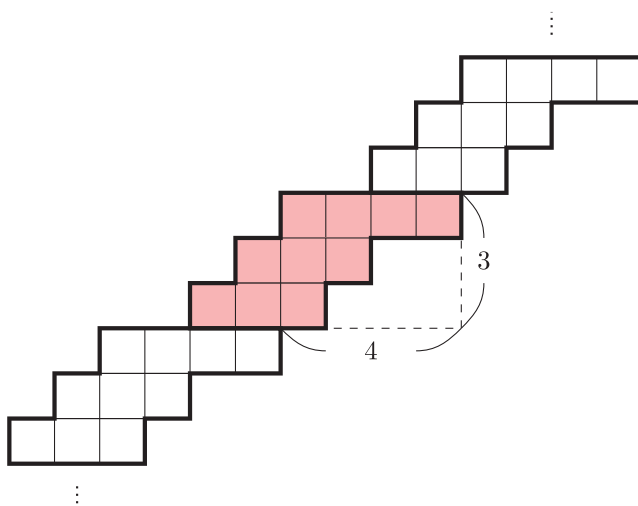
定義 1.3. 周期 $(m, -l)$ を持つ \mathbb{Z}^2 の周期的部分集合 θ に対して

$$\theta \cap ([1, m] \times \mathbb{Z})$$

を θ の基本領域という.

特に上の $\widehat{\lambda/\mu}$ に対してその基本領域は λ/μ である.

例 1.4. $\lambda = (6, 4, 3)$, $\mu = (2, 1, 0) \in \mathcal{P}_{3,4}$ とする. 付随する周期 $(3, -4)$ の巡回的 skew Young 図 $\widehat{\lambda/\mu}$ は下図のとおり:



古典的な (skew) Young 図の場合と同様に巡回的 skew Young 図上でも“標準盤”や“平面分割”などの組合せの対象を考えることができる。それらの個数や母関数を求めることは“巡回的組合せ論”(cylindric combinatorics)の基本的な問題である。以下では、主に“標準盤”の数え上げについて考える。

定義 1.5. $\widehat{\lambda/\mu}$ を周期 $(m, -l)$ の巡回的 skew Young 図とする。 $|\lambda/\mu| = n$ とするとき、 $\widehat{\lambda/\mu}$ 上の巡回的標準盤 (cylindric standard tableau) とは、写像

$$T : \widehat{\lambda/\mu} \longrightarrow [1, n]$$

であって次を満たすものをいう：

(S1) 制限写像 $T|_{\lambda/\mu} : \lambda/\mu \longrightarrow [1, n]$ が全単射。

(S2) $T(i, j) < T(i+1, j) \quad \forall (i, j), (i+1, j) \in \widehat{\lambda/\mu}$.

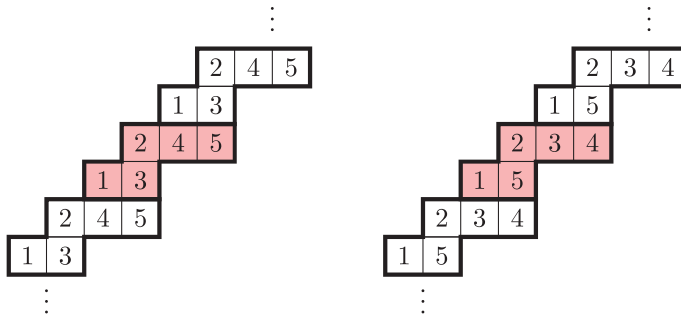
(S3) $T(i, j) < T(i, j+1) \quad \forall (i, j), (i, j+1) \in \widehat{\lambda/\mu}$.

(S4) $T(i+km, j-kl) = T(i, j) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall (i, j) \in \widehat{\lambda/\mu}$.

$\widehat{\lambda/\mu}$ 上の巡回的標準盤全体を $\text{ST}(\widehat{\lambda/\mu})$ で表す。

定義より、巡回的標準盤を基本領域に制限したものは λ/μ 上の標準盤になる。一方、 λ/μ 上の標準盤を平行移動しながら張り合わせて得られる $\widehat{\lambda/\mu}$ 上の盤は巡回的標準盤になるとは限らない。

例 1.6. $\lambda = (4, 2), \mu = (2, 0) \in \mathcal{P}_{2,2}$ とする。左の tableau は巡回的標準盤で、右はそうではない。



定義 1.7. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$, $\lambda \supset \mu$ とし, $n = |\lambda/\mu|$ とする。skew Young 図 λ/μ 上の標準盤 T が l -restricted であるとは,

$$\lambda^{(0)} = \mu,$$

$$T^{-1}([1, i]) = \lambda^{(i)}/\mu \quad i = 1, \dots, n$$

により $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n)}$ を定めるとき, すべての $i \in [0, n]$ に対して $\lambda^{(i)} \in \mathcal{P}_{m,l}$ であることをいう. λ/μ 上の l -restricted 標準盤全体を $\text{ST}_l(\lambda/\mu)$ で表す.

例 1.8. $\lambda = (4, 2)$, $\mu = (1, 0) \in \mathcal{P}_{2,2}$ とする. 左は λ/μ 上の 2-restricted 標準盤で, 右はそうでない.

	2	4	5
1	3		

	2	3	4
1	5		

実際, 左側は, $\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)} = 1 - 0 = 1$, $\lambda_1^{(1)} - \lambda_2^{(1)} = 0$, $\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 1$, $\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} = 0$, $\lambda_1^{(4)} - \lambda_2^{(4)} = 1$, $\lambda_1^{(5)} - \lambda_2^{(5)} = 2$ となるので, これは 2-restricted. 右側は, $\lambda_1^{(4)} - \lambda_2^{(4)} = 4 - 1 = 3 > 2$ なので 2-restricted ではない.

命題 1.9. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$, $\lambda \supset \mu$ とし, $\widehat{\lambda/\mu}$ を λ/μ に付随する周期 $(m, -l)$ の巡回的標準盤とする. このとき, 制限写像

$$\begin{aligned} \text{ST}(\widehat{\lambda/\mu}) &\longrightarrow \text{ST}_l(\lambda/\mu) \\ T &\longmapsto T|_{\lambda/\mu} \end{aligned}$$

は全単射.

2 巡回的標準盤の数え上げに関する公式

\mathfrak{S}_n を n 次対称群とする. 良く知られているように, 複素数体 \mathbb{C} 上においては \mathfrak{S}_n の既約表現と n の分割, すなわち Young 図は 1 対 1 に対応しており, 各既約表現は対応する Young 図上の標準盤を用いて組合せ的に実現されている.

素数標数の体 K 上のモジュラー表現論において, 一般の既約表現に対する組合せ的实现は知られていないが, “completely splittable” と呼ばれるクラスの既約表現が l -restricted 分割と 1 対 1 に対応し, 各既約表現の基底が l -restricted 標準盤と対応していることが Kleshchev [3] によって示されている. さらに退化アフィン Hecke 代数と呼ばれる代数についても, completely splittable な既約表現が巡回的 skew Young 図およびその上の巡回的標準盤を用いて分類, 実現されている ([6]). 特に巡回的標準盤の個数は対応する既約表現の次元を与える.

skew Young 図上の標準盤の個数および母関数に関しては様々な公式が知られておりそのうちのいくつかは巡回的標準盤の場合にも拡張されている.

例えば, (古典的) skew Young 図上の標準盤の個数 $f^{\lambda/\mu}$ の行列式表示

$$f^{\lambda/\mu} = n! \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - i - \mu_j + j)!} \right)_{i,j=1}^m \quad (1)$$

の巡回版は以下のように与えられる：

定理 2.1 ([2, 1]). $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$, $\lambda \supset \mu$ とし, $n = |\lambda/\mu|$ とおく. $\widehat{\lambda/\mu}$ 上の巡回的標準盤の個数 $f^{\widehat{\lambda/\mu}}$ は

$$f^{\widehat{\lambda/\mu}} = \sum_{w \in \widehat{\mathfrak{S}}_m} (-1)^{\ell(w)} \binom{n}{w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)}$$

で与えられる. ここで, $\widehat{\mathfrak{S}}_m$ は $A_{m-1}^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群であり, $\ell(w)$ は $w \in \widehat{\mathfrak{S}}_m$ の長さ, また, $\rho = (m-1, m-2, \dots, 0)$ である.

注意 2.2. 古典的な行列式公式 (1) の右辺を行列式の定義に従って展開すると,

$$\begin{aligned} n! \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - i - \mu_j + j)!} \right)_{i,j=1}^m &= n! \sum_{w \in \widehat{\mathfrak{S}}_m} (-1)^{\ell(w)} \frac{1}{(\lambda_{wi} - wi - \mu_i + i)!} \\ &= \sum_{w \in \widehat{\mathfrak{S}}_m} (-1)^{\ell(w)} \binom{n}{w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)}. \end{aligned}$$

と書ける.

定理 2.1 は $\widehat{\lambda/\mu}$ 上の標準盤の個数の (co)major index に関する母関数 $F^{\lambda/\mu}(q)$ に関しても拡張されている. また, この母関数に関しては, 古典的な場合には Schur 関数 $s_{\lambda/\mu}$ による表示

$$\frac{1}{[n]!} F^{\widehat{\lambda/\mu}}(q) = s_{\lambda/\mu}(1, q, q^2, \dots)$$

が知られている (例えば [7]) が, この公式に関してもその巡回版が得られている ([8]).

一方, Young 図上の標準盤の個数に関するもっとも有名な公式のひとつである hook 公式

$$f^\lambda = n! \prod_{u \in \lambda} \frac{1}{h(u)}$$

については, 古典的な skew Young 図への拡張が得られたのも比較的最近である ([4]). 次節では成瀬氏によるこの skew hook 公式について紹介し, その巡回的 skew Young 図への拡張を予想として与える.

3 巡回的 skew Young 図に対する hook 公式の予想

古典的な hook 公式について復習する.

定義 3.1. λ を分割とする. $(i, j) \in \lambda$ に対して,

$$H(i, j) := \{(a, j) \in \lambda \mid i \leq a\} \cup \{(i, b) \in \lambda \mid j \leq b\}$$

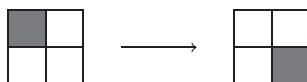
を (i, j) に対する **hook** といい, その元の個数 $h(i, j) := |H(i, j)|$ を **hook 長**という.

定理 3.2 (hook 公式, Frame-Robinson-Thrall, 1954). λ を n の分割とする. このとき, Young 図 λ 上の標準盤の個数 f^λ は次で与えられる:

$$f^\lambda = n! \prod_{u \in \lambda} \frac{1}{h(u)}.$$

成瀬氏によって得られた skew Young 図に対する hook 公式の拡張について説明する.

定義 3.3. λ を分割とし, D を λ の Young 図の部分集合とする. ある $(i, j) \in D$ に対して, $(i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1) \in \lambda \setminus D$ であるとき, D を $D' = D \setminus \{(i, j)\} \cup \{(i+1, j+1)\}$ に置き換えることを (i, j) の **elementary excitation** という.



skew Young 図 λ/μ に対して, $D = \mu$ から始めて何回か elementary excitation を繰り返してできる λ の部分集合を λ/μ の **excited diagram** といい, その全体を $\mathcal{E}(\lambda/\mu)$ で表す.

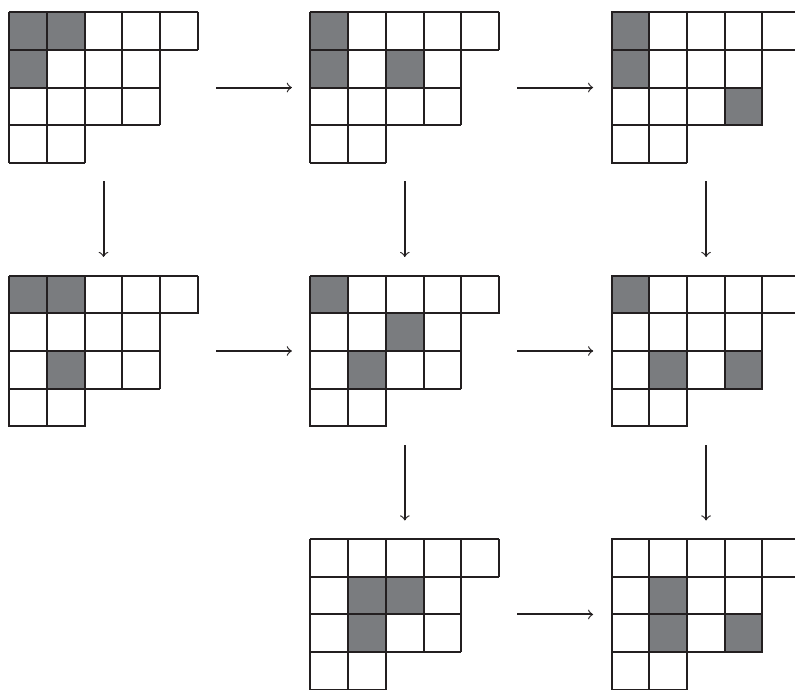


図 1 $\lambda = (5, 4, 4, 2)$, $\mu = (2, 1)$ としたときの excited diagrams.

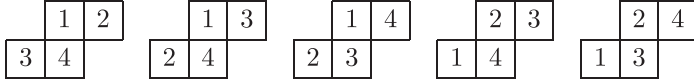
定理 3.4 ([4]). λ/μ を skew Young 図とし, $|\lambda/\mu| = n$ とする. このとき, λ/μ 上の標準盤の個数 $f^{\lambda/\mu}$ は

$$f^{\lambda/\mu} = n! \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda/\mu)} \prod_{u \in \lambda \setminus D} \frac{1}{h(u)}$$

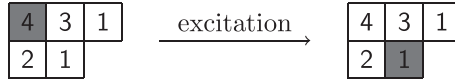
で与えられる. ここで, $h(u)$ は λ における u の hook 長である.

注意 3.5. この定理は一般の d -complete poset に対して拡張されている ([5]).

例 3.6. $\lambda = (3, 2)$, $\mu = (1, 0)$ とする. λ/μ 上の標準盤は次の 5 個である:



λ/μ に対する excited diagram は次の二つであり, λ 上のフック長を各箱に書き入れると次のようになる:



各 excited diagram に対して, D に含まれる箱  を除いたフック長の積の逆数で和を取って計算すると,

$$f^{\lambda/\mu} = 4! \left(\frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} \right) = 5$$

が確かに得られる.

巡回的 skew Young 図に対して hook 公式を拡張したい.

定義 3.7. $\lambda \in \mathcal{P}_{m,l}$ に対して,

$$\lambda_{\frac{\infty}{2}} := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, j \leq \lambda_j\}$$

$$\widehat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}} := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, j \leq \lambda_j\} + \mathbb{Z}(m, -l)$$

と置く.

$\lambda_{\frac{\infty}{2}}$ は $\widehat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ の基本領域である. また, $\lambda \supset \mu$ なる $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$ に対して $\widehat{\lambda/\mu} = \widehat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}} / \widehat{\mu}_{\frac{\infty}{2}}$ である.

定義 3.8. 各箱 $(i, j) \in \widehat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ に対して,

$$H(i, j) := \{(a, j) \in \widehat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}} \mid i \leq a\} \cup \{(i, b) \in \widehat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}} \mid j \leq b\}$$

を (i, j) の **hook** といい, その元の個数

$$h(i, j) := |H(i, j)|$$

を **hook 長**という.

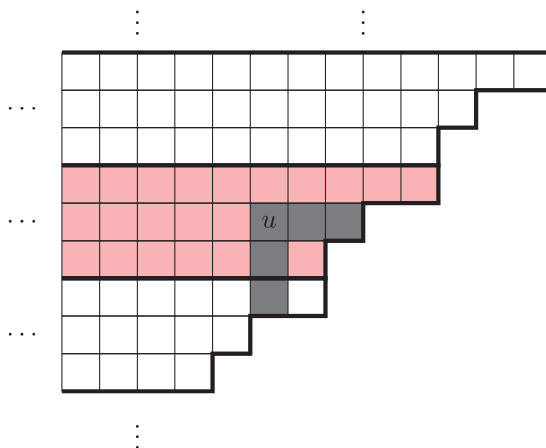


図2 $\lambda = (5, 3, 2) \in \mathcal{P}_{3,3}$ に対する $\hat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ と $u \in \hat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ の hook. この場合, $h(u) = 5$.

巡回的 skew Young 図上での elementary excitation を次のように定める.

定義 3.9. $\lambda \in \mathcal{P}_{m,l}$ とし, \hat{D} を $\hat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ の周期的部分集合とする. すなわち, $\hat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ の基本領域 $\lambda_{\frac{\infty}{2}}$ の部分集合 D により, $\hat{D} = D + \mathbb{Z}(m, -l)$ と書けている. ある箱 $(i, j) \in \hat{D}$ に対して

$$(i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1) \in \hat{\lambda} \setminus \hat{D}$$

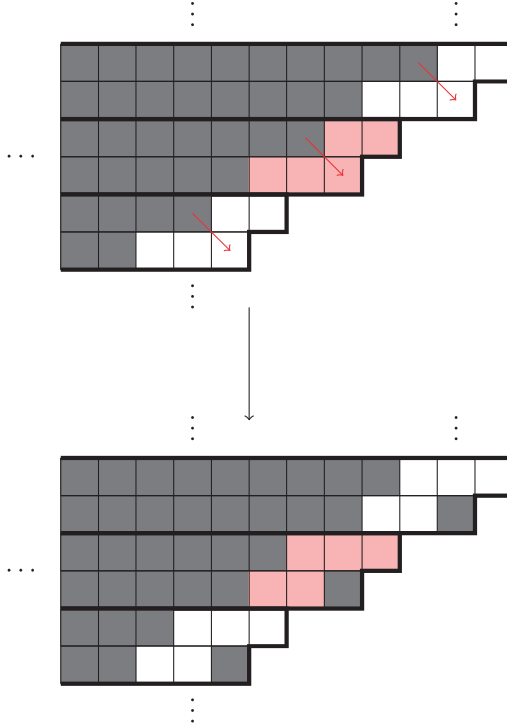
であるとき, \hat{D} を

$$\hat{D}' = \hat{D} \setminus ((i, j) + \mathbb{Z}(m, -l)) \cup ((i+1, j+1) + \mathbb{Z}(m, -l))$$

と置き換える操作を (i, j) の **elementary excitation** という.

$\widehat{\lambda/\mu}$ を周期 $(m, -l)$ の巡回的 skew Young 図とすると, $\hat{D} = \hat{\mu}_{\frac{\infty}{2}}$ から始めて何回か elementary excitation を繰り返してできる $\hat{\lambda}_{\frac{\infty}{2}}$ の部分集合を $\widehat{\lambda/\mu}$ の **excited diagram** といい, その全体を $\mathcal{E}(\widehat{\lambda/\mu})$ で表す.

例 3.10. $\lambda/\mu = (4, 3)/(2, 0)$, $l = 3$ としたときの, $(1, 2)$ の elementary excitation :



予想 3.11. $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m,l}$, $\lambda \supset \mu$ とし, $n = |\lambda/\mu|$ と置く.

このとき, 巡回的 skew Young 図 $\widehat{\lambda/\mu} = \lambda/\mu + \mathbb{Z}(m, -l)$ 上の巡回的標準盤の個数 $f^{\widehat{\lambda/\mu}}$ は

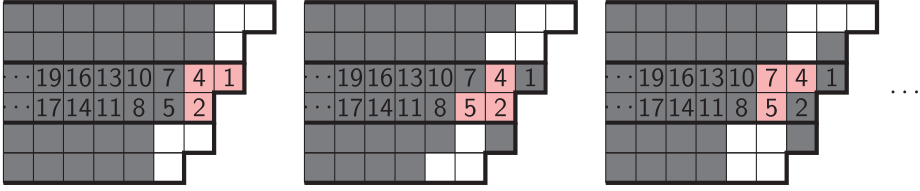
$$f^{\widehat{\lambda/\mu}} = n! \sum_{\widehat{D} \in \mathcal{E}(\widehat{\lambda/\mu})} \prod_{u \in \lambda_{\infty} \setminus D} \frac{1}{h(u)} \quad (2)$$

で与えられる. ここで, D は \widehat{D} の基本領域, $h(u)$ は $\widehat{\lambda}_{\infty}$ における u の hook 長を表す.

注意 3.12. この予想の式 (2) の右辺はほとんどの場合で無限和である. 有限和になるのは例えば l が十分大きいときで, そのとき巡回的 skew Young 図は非連結となり, 巡回的標準盤を考えることと基本領域上の標準盤を考えることは同値となる. したがって, その場合は予想 3.11 は定理 3.4 より従う.

4 具体的計算の例

以下, いくつかの場合に上の予想の式を確かめる:



となり, 2 つおきに同じパターンが現れることに注意すると, 予想の式 (2) の右辺は

$$6 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+4)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+4)(3k+5)} \right)$$

と書ける. 部分分数分解して計算すると

$$6 \cdot \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3k+1} - \frac{2}{3k+2} - \frac{2}{3k+4} + \frac{2}{3k+5} \right) = 1.$$

となり, 予想の式は正しいことが確かめられた.

n が小さいときは具体的な計算により, 予想を確かめることができる:

命題 4.3. $n \leq 4$ のとき, 予想 3.11 は正しい.

また, 例 4.1 の計算を一般化して次が得られる:

命題 4.4. $\lambda = (n)$, $\mu = (0)$, $l = 1$ のとき, 任意の n に対して予想 3.11 は正しい.

証明. この場合明らかに $f^{\lambda/\mu} = 1$ であるので, 式 (2) の右辺が 1 になることを示せばよい.

以下, $n = 2k$ としてこれを示す ($2k+1$ の場合も同様に確かめられる).

$\mu_{\frac{\infty}{2}}$ の各箱は元の位置から elementary excitation を最大 k 回繰り返すことができる. p_i を元の位置から $k-i+1$ 回 excitation した箱の数とする.

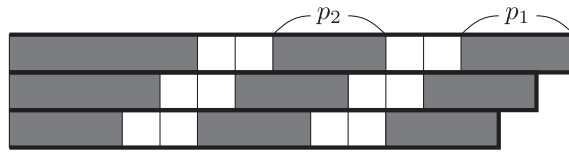


図 3 $k = 2$ の場合の excited diagram.

すると, 予想の式 (2) の右辺は,

$$(2k)! \sum_{p_1, \dots, p_k \geq 0} a_k(p_1, \dots, p_k),$$

ただし,

$$a_k(p_1, \dots, p_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (2 \sum_{j=1}^i p_j + 4i - 3)(2 \sum_{j=1}^i p_j + 4i - 1)}$$

と書ける. p_k についての和を先に計算すると,

$$\begin{aligned} & \sum_{p_1, \dots, p_k \geq 0} a_k(p_1, \dots, p_k) \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_{k-1} \geq 0} a_{k-1}(p_1, \dots, p_{k-1}) \\ & \quad \times \sum_{p_k \geq 0} \frac{1}{(2p_1 + \dots + 2p_k + 4k - 3)(2p_1 + \dots + 2p_k + 4k - 1)} \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_{k-1} \geq 0} a_{k-1}(p_1, \dots, p_{k-1}) \\ & \quad \times \frac{1}{2} \sum_{p_k \geq 0} \left(\frac{1}{2p_1 + \dots + 2p_k + 4k - 3} - \frac{1}{2p_1 + \dots + 2p_k + 4k - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p_1, \dots, p_{k-1} \geq 0} a_{k-1}(p_1, \dots, p_{k-1}) \cdot \frac{1}{2p_1 + \dots + 2p_{k-1} + 4k - 3}. \end{aligned}$$

同様の計算を繰り返すと,

$$\begin{aligned} & \sum_{p_1, \dots, p_k \geq 0} a_k(p_1, \dots, p_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p_1, \dots, p_{k-2} \geq 0} a_{k-2}(p_1, \dots, p_{k-2}) \cdot \sum_{p_{k-1} \geq 0} \frac{1}{2p_1 + \dots + 2p_{k-1} + 4k - 7} \\ & \quad \times \frac{1}{(2p_1 + \dots + 2p_{k-1} + 4k - 5)(2p_1 + \dots + 2p_{k-1} + 4k - 3)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4} \sum_{p_1, \dots, p_{k-2} \geq 0} a_{k-2}(p_1, \dots, p_{k-2}) \\ & \quad \times \frac{1}{(2p_1 + \dots + 2p_{k-2} + 4k - 7)(2p_1 + \dots + 2p_{k-2} + 4k - 5)} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \sum_{p_1 \geq 0} \frac{1}{(2p_1 + 1)(2p_1 + 3) \cdots (2p_1 + 2k + 1)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2k - 1)} = \frac{1}{(2k)!}. \end{aligned}$$

したがって, 式 (2) の右辺 $= (2k)! \sum_{p_1, \dots, p_k \geq 0} a_k(p_1, \dots, p_k) = 1$

□

参考文献

- [1] T. Arakawa, T. Suzuki, A. Tsuchiya, *Degenerate Double Affine Hecke Algebra and Conformal Field Theory*, in *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics* (Kyoto 1996) (Ed. M. Kashiwara, A. Matsuo, K. Saito and I. Satake eds.) Progr. Math., vol 160, Birkhäuser (1998), 1-34.
- [2] M. Jimbo, T. Miwa, M. Okado, *Local state probabilities of solvable lattice models: an $A_{n-1}^{(1)}$ family*, Nuclear Physics **B300**[FS22] (1988), 74-108.
- [3] A. Kleshchev, *Completely Splittable Representations of Symmetric Groups*, Journal of Algebra **181** (1996), 584-592.
- [4] H. Naruse, *Schubert calculus and hook formula*, talk slides at 73rd Sémin. Lothar. Combin., Strobl, Austria, 2014, available at <http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s73vortrag/naruse.pdf>
- [5] H. Naruse, S. Okada, *Skew hook formula for d-complete posets*, arXiv:math/1802.09748v1.
- [6] O. Ruff, *Completely splittable representations of symmetric groups and affine Hecke algebras*, Journal of Algebra **305** (2006), 1197–1211.
- [7] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 2*, Cambridge (1999).
- [8] T. Suzuki, *Cylindrical Combinatorics and Representations of Cherednik Algebras of type A*, preprint